Les Francs Bourgeois - La Salle
Frères des Écoles Chrétiennes

DST de :	MATHEMATIQUES EXPERTES		
Date du DST :	Mardi 4 novembre 2025	Durée de l'épreuve :	1h30 heure
Nom du professeur :	Mme FAHLAOUI	Groupe :	TOPTMATEX1
Matériel autorisé :	• L'usage de la calculatrice est interdite pour cette épreuve.		
Consignes particulières :	• Mettre la copie dans la pochette en entourant les bonnes réponses du QCM et ne pas rendre le sujet. • Soigner la rédaction.		

Exercice 1
Cet exercice se présente sous la forme de « **Questions à Choix Multiples** » auxquelles vous répondrez directement sur la pochette jointe à ce sujet (voir l'annexe page 3 de la pochette).

Exercice 2
Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0$

1. Montrer que si z_0 est solution de (E) alors son conjugué l'est aussi.
2. Montrer que $1 + i$ est solution de (E).
3. En déduire la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3
Déterminer tous les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que $x^2 - y^2 = 5$.

Exercice 4

1. Calculer les restes dans la division euclidienne par 9 des nombres $4^0,\ 4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ 4^4,\ 4^5$.
   Que conjecturez-vous concernant le reste dans la division euclidienne de 4^n par 9 suivant la valeur de l'entier naturel n ?
2. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence votre conjecture.

Exercice 5

On note $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \alpha,\ \beta$ les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1711$$

1. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$

   Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
2. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131$.

   Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.
3. Soit un entier naturel N dont l'écriture en base 12 est :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

   (a) Démontrer qu'il existe un entier naturel k tel que $N = 3k + a_0$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

   (b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.